Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 3

Arsitektur Modern

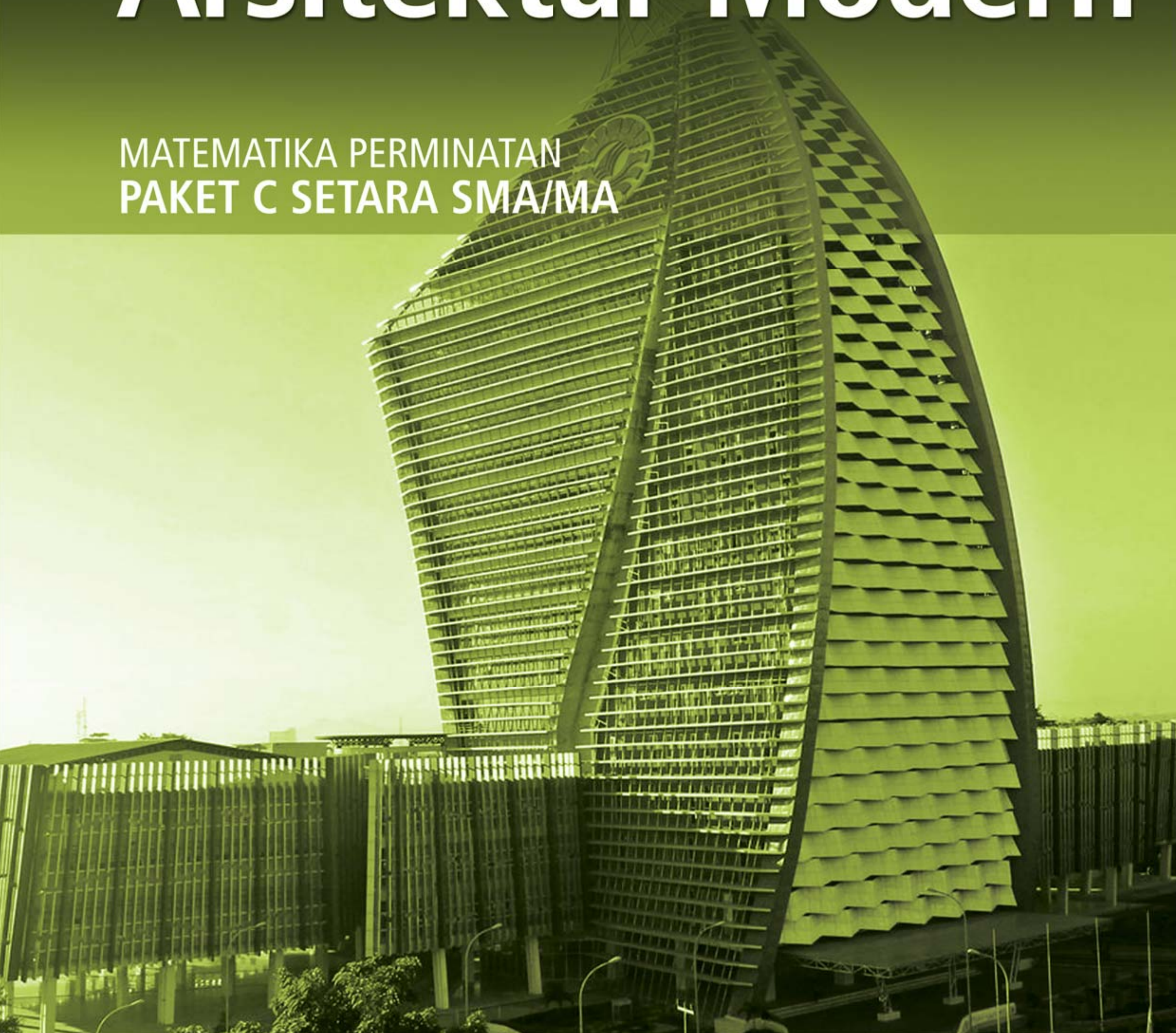
MATEMATIKA PERMINATAN
PAKET C SETARA SMA/MA

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 3

Arsitektur Modern

MATEMATIKA PERMINATAN
PAKET C SETARA SMA/MA



Matematika Peminatan Paket C Tingkatan V Modul Tema 3
Modul Tema 3 : Arsitek Modern

- Penulis: Sri Haryati, S.Pd., M.Si.

- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018

iv+ 36 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

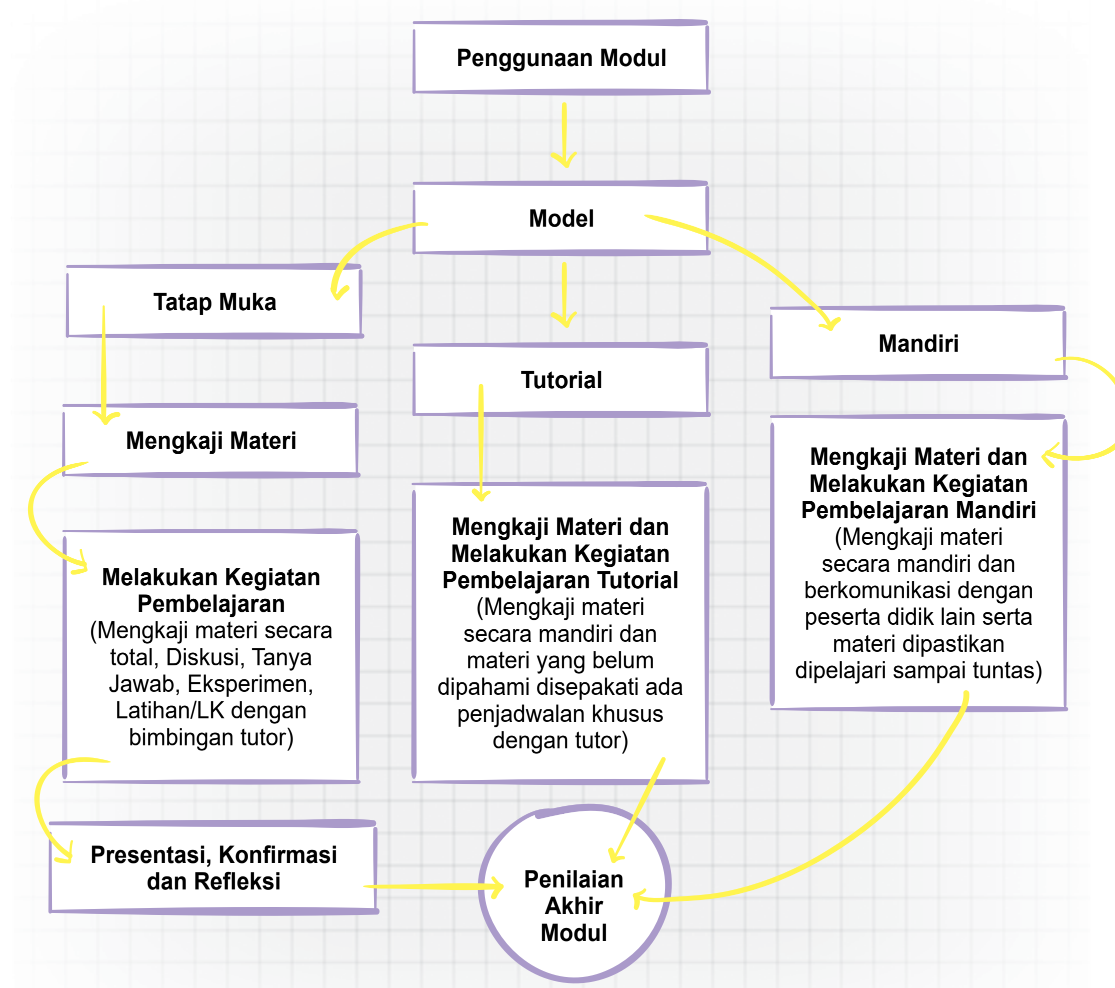
Harris Iskandar

Daftar Isi

ARSITEKTUR MODERN

Petunjuk Penggunaan Modul

Secara umum, petunjuk penggunaan modul pada setiap kegiatan pembelajaran disesuaikan dengan langkah-langkah kegiatan pada setiap penyajian modul. Modul ini dapat digunakan dalam kegiatan pembelajaran oleh peserta didik, baik dilaksanakan dengan model tatap muka, model tutorial, maupun model belajar mandiri. Berikut ini alur petunjuk penggunaan modul secara umum dapat dilihat pada bagian di bawah ini.



Gambar 1.1 Alur Model Kegiatan Pembelajaran

1. **Kegiatan Pembelajaran Tatap Muka**

   Pembelajaran tatap muka merupakan seperangkat tindakan yang dirancang untuk mendukung proses belajar peserta didik secara tatap muka, sedangkan kegiatan tatap muka adalah kegiatan pembelajaran yang di dalamnya terjadi proses interaksi antara peserta didik dan pendidik/tutor. Metode yang sering digunakan dalam kegiatan pembelajaran seperti metode diskusi, Tanya jawab, demonstrasi, eksperimen dan lainnya.

2. **Kegiatan Pembelajaran Tutorial**

   Pembelajaran turorial yang dimaksud dalam kegiatan ini adalah dimana pembelajaran dilakukan secara mandiri untuk materi-materi yang dapat dengan mudah dipahami oleh peserta didik, sedangkan materi-materi yang dianggap sulit untuk dipahami atau dipelajari maka dilakukan dengan tatap muka. Dalam pembelajaran metode tutorial ini diberikan dengan bantuan tutor. Setelah peserta didik diberikan bahan kajian materi pembelajaran, kemudian peserta didik diminta untuk mempelajari kalian materi yang ada dalam modul. Pada bagian kajian materi yang dirasa sulit, peserta didik dapat bertanya pada tutor.

3. **Kegiatan Pembelajaran Mandiri**

   Kegiatan pembelajaran mandiri merupakan kegiatan pembelajaran yang didorong agar peserta didik mampu menguasai suatu kompetensi guna menyelesaikan suatu permasalahan. Pada kegiatan pembelajarn mandiripeserta didik diberikan kajian materi yang ada dalam modul untuk dipelajari dan diarahkan untuk memegang kendali dalam menemukan dan mengorganisir jawaban yang diharapkan. Penetapan kompetensi sebagai tujuan pembelajaran mandiri dan sampai pada cara pencapaian mulai dari penentuan waktu belajar, tempat belajar, sumber belajar lainnya maupun evaluasi modul dilakukan oleh peserta didik itu sendiri. Pada pembelajaran mandiri dipastikan dengan benar bahwa peserta didik melakukan kajian materi, melakukan tahapan kegiatan pembelajarn, tahapan penugasan/latihan, evaluasi, bahkan sampai pada tahap penilaian dilakukan oleh peserta didik itu sendiri.

Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Tabel 1.1 Tabel Kompetensi Dasar dan Pencapaian Kompetensi

No	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1	3.3 Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dengan menggunakan contoh dan model dari peristiwa kontekstual	3.3.1 Mengumpulkan dan mengolah informasi dari peristiwa kontekstual tentang persamaan trigonometri. 3.3.2 Mengingat kembali periodisitas trigonometri. 3.3.3 Menyelesaikan persamaan trigonometri sederhana. 3.3.4 Mengubah bentuk a.cos x + b. Sin x = c menjadi bentuk k.cos (x – q).
	4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan persamaan trigonometri dengan mengidentifikasi dan menyusun model matematikanya serta menggunakan langkah-langkah/ prosedur penyelesaian masalah	4.3.1 Mengidentifikasi masalah kontekstual yang berhubungan dengan persamaan trigonometri. 4.3.2 Menyusun rancangan model matematika dari masalah kontekstual yang berhubungan dengan persamaan trigonometri. 4.3.3 Menyelesaikan masalah kontekstual dengan langkah-langkah penyelesaian.
2	3.4 Membedakan dan menjelaskan penggunaan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus melalui peristiwa kontekstual	3.4.1 Menentukan rumus jumlah dan selisih sudut dalam sinus, cosinus dan tangen. 3.4.2 Menentukan jumlah dan selisih sinus, cosinus dan tangen. 3.4.3 Menyelesaikan persamaan trigonometri dengan menggunakan cara yang digunakan dalam aljabar.
	4.4 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan rumus jumlah serta selisih sinus dan cosinus dengan menggunakan prosedur dan strategi penyelesaian masalah sesuai dengan karakteristik masalahnya	4.4.1 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berhubungan dengan jumlah dan selisih sudut dalam sinus, cosinus dan tangen 4.4.2 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berhubungan dengan jumlah dan selisih sinus, cosinus dan tangen.

Tujuan yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul

Tujuan setelah mempelajari modul 3 ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan pengetahuan, dan ketrampilan tentang :

1. Persamaan trigonometri dan persamaan trigonometri sederhana
2. Mengidentifikasi, mengumpulkan dan mengolah informasi, merancang model dan menyelesaikan masalah konstekstuak yang berhubungan dengan persamaan trigonometri.
3. Menentukan rumus jumlah dan selisih sudut dalam sinus, cosinus dan tangen.
4. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan jumlah dan selisih sudut dalam sinus, cosinus dan tangen.

Pengantar Modul

Pembelajaran merupakan wahana untuk mendapatkan kemampuan baik sikap, pengetahuan dan ketrampilan. Untuk mendukung terciptanya kegiatan pembelajaran baik melalui model tatap muka, tutorial maupun mandiri, maka salah satu alternatifnya adalah dengan modul ini. Materi pada modul 3 ini adalah trigonometri yang terdiri dari dua materi yaitu perbandingan dan persamaan trigonometri, serta jumlah dan selisih sinus, cosinus, tangen.

Materi pada modul 3 ini disajikan dalam tema “Arsitektur Modern” dan di dalamnya terdapat beberapa subtema yang terintegrasi dalam kegiatan pembelajaran. Secara umum materi pembelajaran dalam modul ini membahas yang berkaitan dengan pemahaman persamaan trigonometri serta rumus jumlah dan selisih pada perbandingan trigonometri serta penyelesaian masalah sehari-hari yang terkait persamaan dan perbandingan trigonometri. Modul ini memberikan gambaran uraian materi dengan penerapan dalam kehidupan sehari-hari atau bersifat kontekstual.

Modul 3 dengan tema “Arsitektur Modern” ini terbagi menjadi dua subtema yang terintegrasi ke dalam unit, yaitu unit 1 dengan subtema “Rancangan Jalan Raya dan Jembatan”, dan unit 2 dengan subtema “Rancangan Gedung Bertingkat”. Masing-masing unit memuat tentang uraian materi, penugasan dan soal-soal latihan.

Modul ini dilengkapi dengan contoh-contoh yang terjadi di kehidupan sehari-hari, misalnya yang berkaitan dengan trigonometri adalah pemanfaatan arsitektur modern seperti rancangan jalan raya yang digunakan untuk mengukur tingkat kemiringan jalan, jembatan dan gedung bertingkat.

Dengan mempelajari modul ini, dimana materi dikaitkan dengan masalah kehidupan sehari-hari, maka diharapkan peserta didik dengan mengkaji, mencermati, mengolah, menjawab permasalahan atau soal-soal latihan dapat memberikan manfaat dalam kehidupan sehari-hari.

Materi disajikan dengan tema dan sub tema yang diintegrasikan dengan permasalahan kehidupan sehari-hari dimaksudkan agar peserta didik lebih tertarik dan memahami bahwa mempelajari trigonometri sangat penting dan bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mempelajari modul ini, sudah barang tentu memberikan gambaran betapa pentingnya belajar, karena dengan belajar, peserta didik mampu menghadapi dan menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam dunia nyata, sehingga jelas bahwa dengan mempelajari materi trigonometri dapat memberikan manfaat dalam menjalani kehidupan sehari-hari.

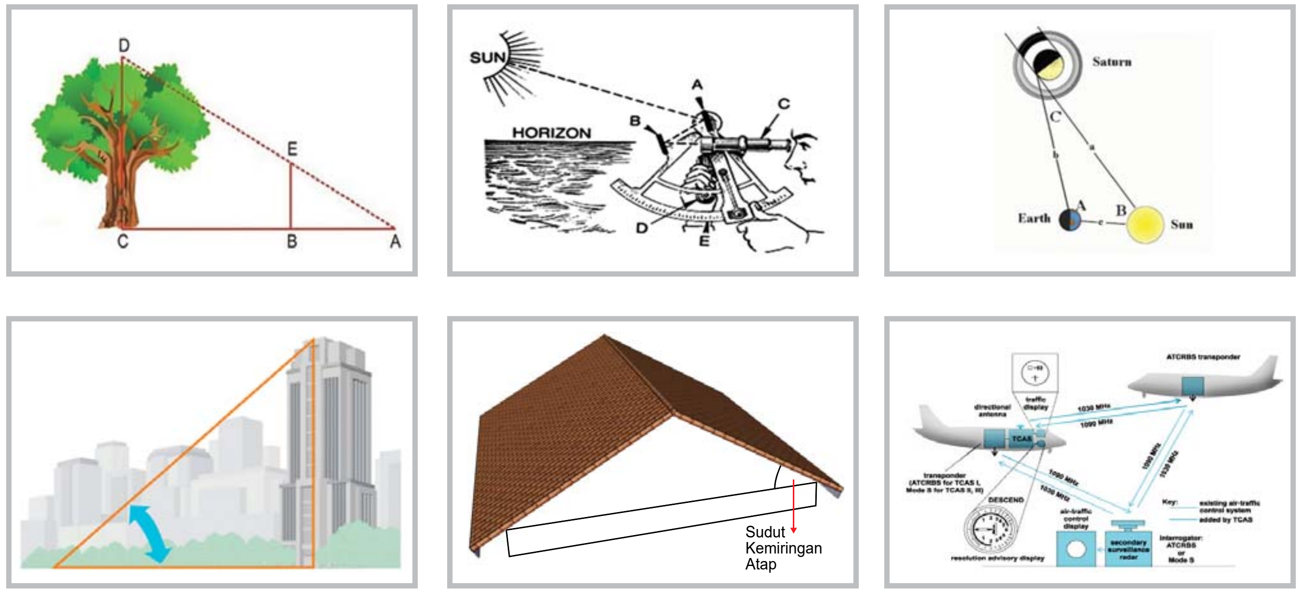
UNIT 1 RANCANGAN JALAN RAYA DAN JEMBATAN

“Apa manfaat dari materi yang saya pelajari?”. Pertanyaan ini terkadang terlintas dalam pikiran kita. Sebagai induk dari segala ilmu, matematika memberikan manfaat yang besar pada kemajuan ilmu pengetahuan lain dan setiap aspek kehidupan manusia.

Trigonometri adalah bagian dari ilmu matematika yang mempelajari tentang hubungan antara sisi dan sudut suatu segitiga serta fungsi dasar yang muncul dari relasi tersebut. Trigonometri merupakan nilai perbandingan yang didefinisikan pada koordinat kartesius atau segitiga siku-siku. Bagi para siswa, trigonometri identik dengan fungsi trigonometri yang meliputi sinus (sin), cosinus (cos), tangen (tan), cosecan (cosec), secan (sec), dan cotangen (cotan) yang kesemuanya merupakan cara untuk menentukan suatu sisi sebuah segitiga atau sudut yang terbentuk dari dua buah sisi dalam sebuah segitiga.

Trigonometri merupakan ilmu matematika yang sangat penting dalam kehidupan. Aplikasi ilmu trigonometri dalam kehidupan mencangkup segala bidang seperti astronomi, geografi, teori musik, elektronik, ekonomi, medical, teknik, dan masih banyak lagi.

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 1.2 Penggunaan Trigonometri

Gambar di atas, adalah beberapa contoh penerapan ilmu trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, antara lain :

1. Menentukan tinggi pohon, menara, bukit, tiang dan gedung.
2. Digunakan dalam oseanografi, dalam menghitung ketinggian gelombang air laut
3. Digunakan dalam ilmu astronomi, yaitu untuk menemukan jarak antara benda-benda angkasa.
4. Digunakan dalam ilmu teknis sipil, yaitu teknik modern pembangunan gedung bertingkat.
5. Digunakan dalam ilmu teknis sipil, yaitu teknik modern mengukur tingkat kemiringan atap, kemiringan jalan dan kemiringan jembatan.
6. Digunakan dalam bidang navigasi.

Hal pertama yang perlu dimengerti dalam memahami konsep dasar trigonometri adalah mengetahui, mengerti dan memahami bentuk dan rumus-rumus sebuah segitiga, terutama segitiga siku-siku. Pada dasarnya sebuah segitiga selalu terdiri dari tiga sisi, yaitu sisi miring, sisi samping, dan sisi depan. Dan tiga buah sudut yaitu sudut tegak lurus, sudut depan dan sudut samping. Dimana jika di tambahkan jumlah sudut sebuah segitiga haruslah 180 derajat. Untuk lebih memahami materi tersebut, ikuti semua rangkaian kegiatan berikut ini.

Perbandingan dan Persamaan Trigonometri

Apakah kalian tahu perbedaan aplikasi perbandingan trigonometri dan persamaan trigonometri? Dalam aplikasi perbandingan trigonometri biasanya yang ditentukan adalah jarak atau tinggi dengan besar sudut, misalnya nilai x pada sin x, cos x, dan tan x dan seterusnya yang sudah diketahui. Contohnya adalah penentuan jarak antara dua benda, tinggi tiang bendera, tinggi pohon atau tinggi menara. Sebaliknya, pada aplikasi persamaan trigonometri kalian justru diminta menentukan besar sudut x yang terdapat dalam perbandingan trigonometri. Seringkali besar sudut yang memenuhi tidaklah tunggal.

Salah satu penerapan persamaan trigonometri adalah melakukan survei pembuatan jalan, pembuatan jembatan dan mendirikan bangunan, semua itu menggunakan trigonometri dalam pekerjaannya sehari-hari. Mencari ketinggian jalan yang miring pada bidang datar hanya dengan mengetahui sudut kemiringan jalan dan panjang jalan. Pada dasarnya pembangunan jalan adalah proses pembukaan ruangan lalu lintas yang mengatasi berbagai rintangan geografi. Proses ini melibatkan pengalihan muka bumi, pembangunan jembatan dan terowongan, bahkan juga pengalihan tumbuh-tumbuhan.

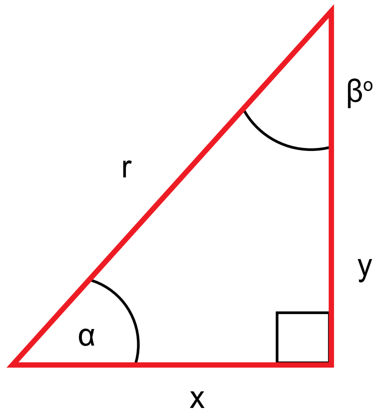
Kalian pasti tahu, bahwa ada berbagai bentuk macam jalan. Bentuk jalan ada yang lurus, ada yang menanjak. Pembangunan jalan pasti juga akan mempertimbangkan kemiringan suatu sudut pada permukaan tanah. Dalam pembangunan jalan, permukaan lapis pondasi harus rata sehingga air tidak dapat menggenang akibat permukaan yang tidak rata. Deviasi maksimum untuk kerataan permukaan adalah 1 cm".

Maka dari itu, ilmu trigonometri sangat berperan dalam proyek pembangunan suatu jalan, tidak perlu susah-susah harus mengukur luasnya lahan yang akan kita bangun dengan terjun ke medan tersebut. Tapi, hanya dengan kita mengambil data dan diinput dalam suatu system informasi serta dengan ilmu trigonometri kita dapat mengukur kemiringan suatu permukaan tanah.

Review Konsep Perbandingan

1. Perbandingan Trigonometri dalam Segitiga Siku-siku

Perhatikan segitiga siku-siku ABC berikut ini :



Gambar 1.3 Segitiga Siku-siku

Sisi y disebut sisi depan

Sisi x atau disebut sisi samping

Sisi r disebut hipotenusa/sisi miring

Berdasarkan segitiga ABC di atas didefinisikan perbandingan trigonometri sebagai berikut :

$$\sin \alpha^o = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{c} \qquad \csc \alpha^o = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y}$$

$$\cos \alpha^o = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{b}{c} \qquad \sec \alpha^o = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x}$$

$$\tan \alpha^o = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{y}{r} \qquad \cot \alpha^o = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{x}{y}$$

Berdasarkan definisi tersebut, dapat diturunkan rumus kebalikan sebagai berikut:

$$\sin \alpha^o = \frac{1}{\text{cosec } \alpha} \qquad \tan \alpha^o = \frac{1}{\cot \alpha}$$

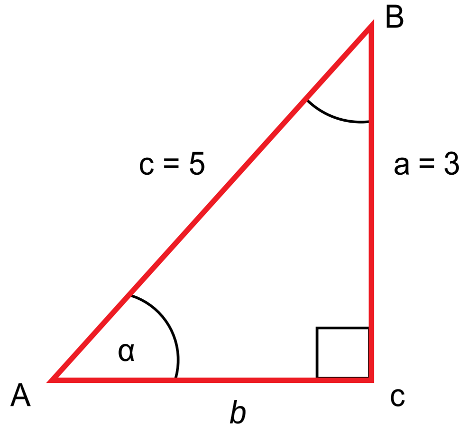
$$\cos \alpha^o = \frac{1}{\sec \alpha} \qquad \cot \alpha^o = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Contoh 1:

Diketahui α° sudut lancip dan sin α° = $\frac{3}{5}$. Tentukan perbandingan trigonometri yang lain !

Jawab:

Nilai b dapat dicari dengan dalil Pythagoras



$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{5^2 - 3^2}$

$b = \sqrt{25 - 9}$

$b = \sqrt{16}$

$b = 4$

$\frac{BC}{AC}$

$\frac{6}{10}$

Maka nilai perbandingan trigonometri yang lain adalah :

1) $\cos \alpha^\circ = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$
2) $\tan \alpha^\circ = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$
3) $\cot \alpha^\circ = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$
4) $\sec \alpha^\circ = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$
5) $\cos ec\ \alpha^\circ = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$

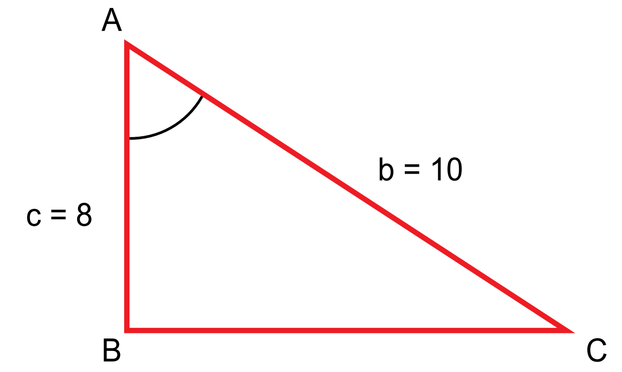
Contoh 2:

Diketahui sebuah rancangan kemiringan jalan raya berbentuk segitiga. Jika panjang sisi miring yang menanjak itu adalah 10 m dan panjang sisi yang lain adalah 8 m, maka tentukan :

a. Panjang sisi segitiga yang lain
b. Perbandingan trigonometri (sin, cos, tan)

Jawab:

Dari keterangan diatas, diperoleh gambar berikut :



a. Sisi BC = ...?

Kita gunakan teorema Pythagoras

$BC^2 = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

$BC^2 = \sqrt{10^2 - 8^2}$

$BC^2 = \sqrt{100 - 64}$

$BC^2 = 36$

$BC = 6$

b. Perbandingan ∠ BAC

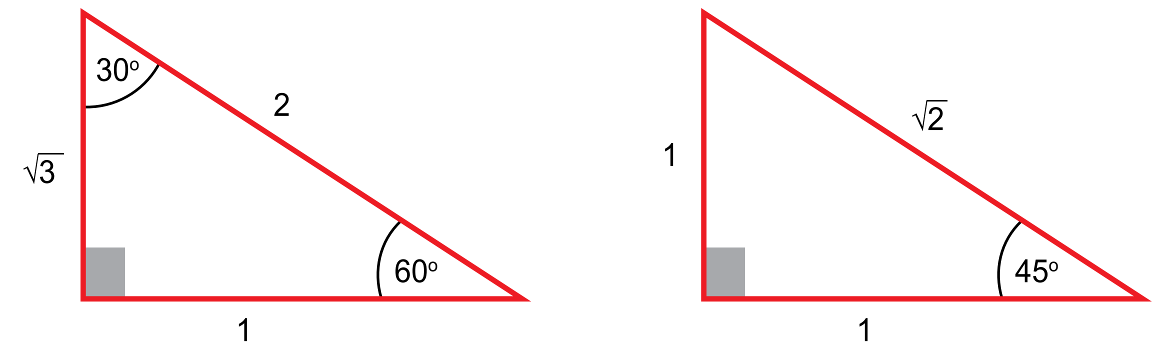
$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\cos \angle BAC = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2. Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

Untuk memahami berapa nilai perbandingan trigonometri untuk sudut istimewa, kalian hanya perlu memahami perbandingan sudut pada segitiga berikut ini.



Gambar 1.4 Segitiga dengan berbagai sudut

Contoh:

$\sin 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Berikut tabel perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa.

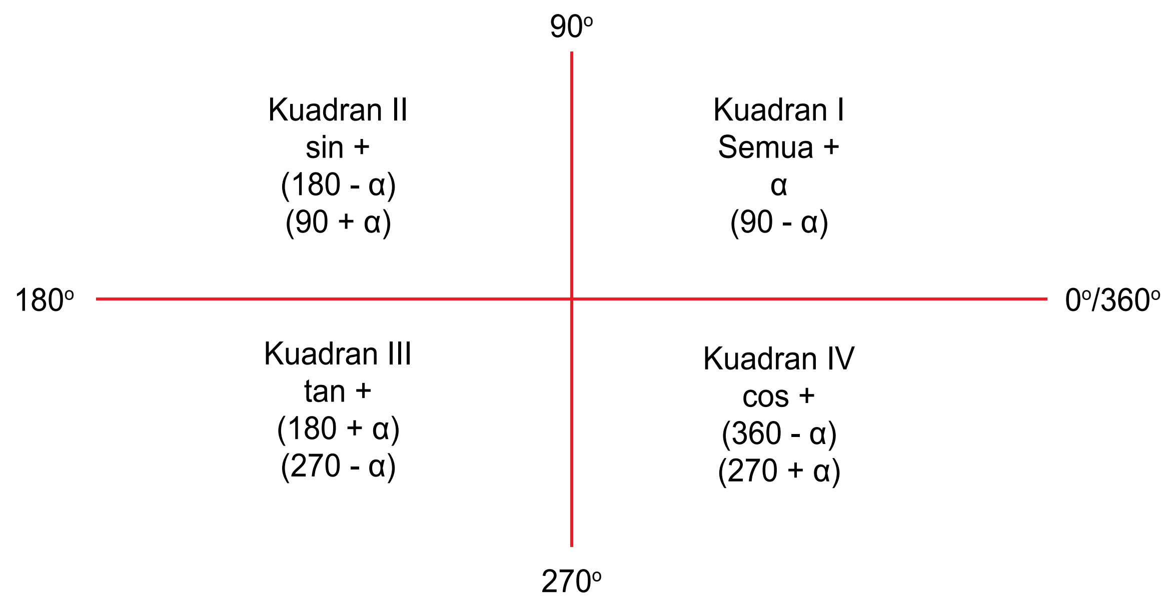
Tabel 1.2 Tabel Perbandingan Trigonometri Sudut-sudut Istimewa

a°	0°	30°	45°	60°	90°
a°	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
0°	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
30°	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tidak terdefinisi
45°	Tidak terdefinisi	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
60°	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	Tidak terdefinisi
90°	Tidak terdefinisi	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri dari sudut-sudut yang tidak istimewa (selain 0°, 30°, 45°, 60°, dan 90°) dan kelipatannya dapat ditentukan dengan menggunakan tabel logaritma yang di dalamnya memuat daftar nilai perbandingan trigonometri sinus, cosinus, tangen, dan cotangen. Selain itu juga dapat menggunakan kalkulator yang ada tombol-tombol sinus, cosinus, tangen, dan cotangen.

3. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut di Berbagai Kuadran

Sudut satu lingkaran (0° - 360°) terbagi menjadi 4 wilayah (kuadran), yaitu :



Gambar 1.5 Sudut diberbagai kuadran

a. Sudut-sudut yang terletak di kuadran I, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 0° sampai 90° atau 0° < α° < 90°.
b. Sudut-sudut yang terletak di kuadran II, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 90° sampai 180° atau 90° < α° < 180°.
c. Sudut-sudut yang terletak di kuadran III, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 180° sampai 270° atau 180° < α° < 270°.
d. Sudut-sudut yang terletak di kuadran IV, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 270° sampai 360° atau 270° < α° < 360°.

Perhatikan tanda x dan y pada masing-masing kuadran di atas, dapat diperoleh tabel tanda nilai perbandingan trigonometri sebagai berikut :

Tabel 1.3 Tabel Tanda Nilai Perbandingan Trigonometri

Kuadran / Fungsi	I	II	III	IV
Sinus	+	+	+	+
Cosinus	+	+	-	-
Tangen	+	-	+	-
cot	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
cosec	+	+	-	-

Untuk bentuk (90 - α), (90 + α), (270 - α), dan (270 + α) bentuk perbandingan trigonometri mengalami perubahan sebagai berikut :

Bentuk sin menjadi cos

Bentuk cos menjadi sin

Bentuk tan menjadi cot

Contoh:

Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ini dalam perbandingan trigonometri untuk sudut lancip.

1. cos 70°
2. sin 200°
3. tan 380°

Jawab:

1. cos 70° ada di kuadran I, sehingga nilainya positif

   cos 70° = cos 70° atau

   cos 70° = cos (90° – 20°) = sin 20°
2. sin 200° ada di kuadran III, sehingga nilainya negatif

   sin 200° = sin (180° + 20°) = - sin 20° atau

   sin 200° = cos (270° – 70°) = - cos 70°
3. tan 320° ada di kuadran IV, sehingga nilainya negatif

   tan 320° = tan (360° – 40°) = - tan 40° atau

   tan 320° = cot (270° + 50°) = - cot 50°

Identitas Trigonometri Dasar

Identitas trigonometri dasar merupakan satu perbandingan trigonometri dengan trigonometri lainnya. Untuk menunjukkan kebenaran suatu identitas trigonometri dapat dilakukan dengan mengubah salah satu atau kedua ruas persamaan menjadi bentuk yang sama. Atau ruas kiri dirubah sehingga sama dengan ruas kanan atau ruas kanan dirubah sehingga sama dengan ruas kiri.

Ada tiga jenis identitas trigonometri, yaitu :

1. Hubungan kebalikan

$$\sin \alpha^\circ = \frac{1}{\cos ec\ \alpha^\circ} \qquad \cot \alpha^\circ = \frac{1}{\tan \alpha^\circ}$$

$$\cos \alpha^\circ = \frac{1}{\sec \alpha^\circ} \qquad \sec \alpha^\circ = \frac{1}{\tan \alpha^\circ}$$

$$\tan \alpha^\circ = \frac{1}{\cot \alpha^\circ} \qquad \cos ec\ \alpha^\circ = \frac{1}{\sin \alpha^\circ}$$

2. Hubungan perbandingan

$$\tan \alpha^\circ = \frac{\sin \alpha^\circ}{\cos \alpha^\circ} \qquad \cot \alpha^\circ = \frac{\cos \alpha^\circ}{\sin \alpha^\circ}$$

3. Hubungan Pythagoras

$$\sin^2 \alpha^\circ + \sin^2 \beta^\circ = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha^\circ = \sec^2 \alpha^\circ$$

$$1 + \cot^2 \alpha^\circ = \cos ec^2\ \alpha^\circ$$

Agar kalian lebih memahami bagaimana penerapan identitas trigonometri tersebut dalam bentuk soal, coba kalian pelajari contoh soal berikut.

Contoh 1:

Jika sin α = ½ dan 0° ≤ α ≤ 90°, hitunglah nilai dari :

a. cos α
b. tan α

Jawab:

a. Diketahui $\sin \alpha = \frac{1}{2} = \frac{y}{r}$

   Maka nilai x adalah : $x = \sqrt{(r^2 - y^2)} = \sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{(4 - 1)} = \sqrt{3}$

   Jadi, $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Contoh 2:

Buktikan identitas berikut : $\frac{\sin P}{\cos P} + \frac{\cos P}{\sin P} = \frac{1}{\cos P. \sin P}$!

Jawab:

Bukti ruas kiri $= \frac{\sin P}{\cos P} + \frac{\cos P}{\sin P}$

$$= \frac{\sin^2 P + \cos^2 P}{\cos P.\sin P}$$

$$= \frac{1}{\cos P.\sin P}$$

= ruas kanan (terbukti)

Persamaan Trigonometri Sederhana

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang memuat perbandingan trigonometri (ukuran derajat atau radian).

1. Penyelesaian Persamaan $\sin x^o = \sin \alpha^o$

> Jika $\sin x^o = \sin \alpha^o$ dimana $x \in R$, maka
>
> $x = \alpha + k.360$ atau $x = (180 - x) + k.360$. dimana $k \in B$
>
> Jika $\sin x^o = \sin A^o$ dimana $x \in R$, maka
>
> $x = A + k.\pi$ atau $x = (\pi - A) + k.2\pi$. dimana $k \in B$

Agar kalian lebih memahami bagaimana penerapan konsep tersebut dalam bentuk soal, coba kalian perhatikan contoh soal berikut.

Contoh Soal:

Tentukan penyelesaian dari setiap persamaan trigonometri berikut.

1. $\sin x^o = \sin 25^o$
2. $\sin x^o = \sin \pi$
3. $\sin 2x^o = \sin 40^o,\ 0 \le x \le 360$
4. $\sin (x - \pi) = \sin \frac{\pi}{6},\ 0 \le x \le 2\pi$

Jawab:

1. $\sin x^o = \sin 25^o$, diperoleh :

   $x^o = 25 + k.\ 360$ atau $x = (180 – 25) + k.\ 360 = 155 + k.360$

   Jadi, penyelesaian umumnya adalah : $x = 25 + k.360$ atau

   $x = 155 + k.360$
2. $\sin x^o = \sin \pi$ diperoleh :

   $x = \pi + k.2\pi$ atau $x = (\pi - \pi) + k.2\pi = k.2\pi$

   Jadi, penyelesaian umumnya adalah $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ atau $x = k.2\pi$

   Kedua penyelesaian ini dapat ditulis menjadi $x = k.2\pi$.
3. $\sin 2x^o = \sin 40^o$, diperoleh :

   $2x = 40 + k.360$ atau $2x = (180 - 40) + k.360$

   $x = 20 + k.180$ atau $x = 70 + k.180$

   $k = 0 \leftrightarrow x = 20$ atau $x = 70$

   $k = 1 \leftrightarrow x = 200$ atau $x = 250$

   Jadi, HP = {20, 70, 200, 250}
4. $\sin (x - \pi) = \sin \frac{\pi}{6}$, diperoleh :

   $x - \pi = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$ atau $x - \pi = (\pi - \frac{\pi}{2}) + k.2\pi$

   $x = \frac{7\pi}{6} + k.2\pi$ atau $x = \frac{11\pi}{6} + k.2\pi$

   $k = 0 \leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ atau $x = \frac{11\pi}{6}$

   Jadi, HP = $\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$

2. Penyelesaian Persamaan $\cos x^o = \cos \alpha^o$

> Jika $\cos x^o = \cos \alpha^o$ dimana $x \in R$, maka
>
> $x = \alpha + k.360$ atau $x = -\alpha + k.360$. dimana $k \in B$
>
> Jika $\cos x^o = \cos A^o$ dimana $x \in R$, maka
>
> $x = A + k.2\pi$ atau $x = -A + k.2\pi$. dimana $k \in B$

Agar kalian lebih memahami bagaimana penerapan konsep tersebut dalam bentuk soal, coba kalian perhatikan contoh soal berikut.

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari setiap persamaan trigonometri berikut.

1. $\cos (x + 20) = \cos 40, 0 \le x \le 360$
2. $\cos 2x^o = \cos 64^o, 0 \le x \le 360$

Jawab:

1. $\cos (x + 20) = \cos 40$, diperoleh :

   $x + 20 = 40 + k.360$ atau $x + 20 = -40 + k.360$

$x = 20 + k.360$ atau $x = -60 + k.360$

$k = 0 \leftrightarrow x = 20$ atau $x = -60$ (Tidak memenuhi)

$k = 1 \leftrightarrow x = 380$ (Tidak memenuhi) atau $x = 300$

Jadi, HP = {20,300}

2. $\cos 2x^o = \cos 640$, $0 \leq x \leq 360$, diperoleh :

$2x = 64 + k.360$ atau $2x = -64 + k.360$

$x = 32 + k.180$ atau $x = -32 + k.180$

$k = 0 \leftrightarrow x = 32$ atau $x = -32$ (Tidak memenuhi)

$k = 1 \leftrightarrow x = 212$ atau $x = 148$

Jadi, HP = {32,148,212}

3. Penyelesaian Persamaan $\tan x^o = \tan \alpha^o$

Jika $\tan x^o = \tan \alpha^o$ dimana $x \in R$, maka $x = \alpha + k.$ dimana $k \in B$

Jika $\tan x^o = \tan A^o$ dimana $x \in R$, maka $x = A + k.\pi$ dimana $k \in B$

Agar kalian lebih memahami bagaimana penerapan konsep tersebut dalam bentuk soal, coba kalian perhatikan contoh soal berikut.

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari setiap persamaan trigonometri berikut.

1. $\tan 2x = \tan 40$, untuk $0 \leq x \leq 360$
2. $\tan 2x = x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Jawab:

1. $\tan 2x = \tan 40$, diperoleh :

$2x = 40 + k.180$

$x = 20 + k.90$

$k = 0 \leftrightarrow x = 20$

$k = 1 \leftrightarrow x = 110$

$k = 2 \leftrightarrow x = 200$

$k = 3 \leftrightarrow x = 290$

Jadi, HP = {20, 110, 200, 290}

2. $\tan 2x = \tan x$ diperoleh :

$2x = x + k.\pi$

$x = k.\pi$

$k = 0 \leftrightarrow x = 0$

$k = 1 \leftrightarrow x = \pi$

$k = 2 \leftrightarrow x = 2\pi$

Jadi, HP = $\{0, \pi, 2\pi\}$

4. Penyelesaian Persamaan $\sin x^o = a$, $\cos x^o = a$ dan $\tan x^o = a$

Adakalanya kalian menemui persamaan trigonometri seperti berikut.

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\tan x = \sqrt{3}$

Bagaimana menyelesaikan bentuk persamaan tersebut?
Hal ini dapat ditentukan dengan mengubah ruas kanan menjadi bentuk perbandingan trigonometri yang sesuai, yaitu :

$\sin x = \alpha$ diubah dulu menjadi $\sin x = \sin \alpha$

$\cos x = \alpha$ diubah dulu menjadi $\cos x = \cos \alpha$

$\tan x = \alpha$ diubah dulu menjadi $\tan x = \tan \alpha$

Agar kalian lebih memahami bagaimana penerapan konsep tersebut dalam bentuk soal, coba kalian perhatikan contoh soal berikut.

Contoh 1:

Tentukan penyelesaian dari setiap persamaan trigonometri berikut.
Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$ dalam interval $0 \leq x \leq 2$

Jawab:

$\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$ dengan $0 \leq x \leq 2$, maka :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ atau } x = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ atau $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{3\pi}{4}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah

Contoh 2:

Hitunglah nilai dari : $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

Jawab:

Kita tentukan nilai α sehingga $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, diperoleh α = 120

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \leftrightarrow \cos 2x = \cos 120$, diperoleh

$2x = 120 + k.360$ atau $2x = -120 + k.360$

$x = 60 + k.180$ atau $2x = -60 + k.180$

$k = 0 \leftrightarrow x = 60$ atau $x = -60$ (Tidak memenuhi)

$k = 1 \leftrightarrow x = 240$ atau $x = 120$

$k = 2 \leftrightarrow x = 420$ (Tidak memenuhi) atau $x = 300$

Jadi, HP = {60, 120, 240, 300}

5. Penyelesaian Persamaan Kuadrat Trigonometri

Untuk dapat menyelesaikan persamaan kuadrat trigonometri, kalian harus sudah memahami tentang pemfaktoran persamaan kuadrat dengan baik, karena dalam persamaan berikut mengandung bentuk perbandingan trigonometri yang dikuadratkan.

Bagaimana cara menyelesaikan persamaan kuadrat trigonometri, untuk lebih memahaminya perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut :

$2\cos^2 x^o + \cos x^o - 1 = 0, 0 \leq x \leq 360$

Jawab:

$(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$, diperoleh $\cos x = \frac{1}{2}$ atau $\cos x = -1$

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos 60$, diperoleh

$x = 60 + k.360$ atau $x = -60 + k.360$

Untuk $k = 0 \leftrightarrow x = 60$ atau $x = -60$ (Tidak memenuhi)

Untuk $k = 1 \leftrightarrow x = 420$ (Tidak memenuhi) atau $x = 300$

Cos xo = - 1 = cos 180o, diperoleh :

$x = 180 + k.360$ atau $x = -180 + k.360$

Untuk $k = 0 \leftrightarrow x = 180$ atau $x = -180$ (Tidak memenuhi)

Untuk $k = 1 \leftrightarrow x = 540$ (Tidak memenuhi) atau $x = 180$

Jadi, HP = {60, 180, 300}

6. Bentuk Persamaan a cos x + b sin x = c

Untuk mempermudah menyelesaikan bentuk persamaan a cos x + b sin x = c, bentuk tersebut diubah terlebih dahulu menjadi bentuk k cos (x - α) dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{b}{a}$, dengan α harus sama kuadrannya dengan titik (a, b).

Sehingga persamaan a cos x + b sin x = c berubah menjadi k cos (x - α) = c atau $\cos (x - \alpha) = \frac{c}{k}$.

Perhatikan bahwa nilai cos (x - α) berada pada interval $-1 \leq \cos (x - \alpha) \leq 1$, sehingga agar terdefinisi diperlukan syarat $-1 \leq \frac{c}{k} \leq 1$.

Agar kalian lebih mudah memahaminya perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2$, untuk $0^o \leq x \leq 360^o$.

Jawab:

Langkah pertama, ruas kiri diubah menjadi bentuk k cos (x - α)

$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2$ diperoleh nilai a = 1 dan $b = -\sqrt{3}$

Kemudian kita cari nilai k sebagai berikut :

$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

Titik $(a, b) = (1, -\sqrt{3})$ berada di kuadran IV, sehingga kita harus memilih nilai α di kuadran IV juga. Kita hitung nilai tan α sebagai berikut :

$\tan \alpha = b/a = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$, karena α di kuadran IV maka α = 300°.

Sehingga kita peroleh $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos (x - 300)$

$\cos x - \sqrt{3} \sin x = \leftrightarrow 2 \cos (x - 300) = 2 \leftrightarrow \cos (x - 300) = 1 = \cos 0$

$x - 300 = 0 + k.360 \leftrightarrow x = 300 + k.360$

$k = 0 \leftrightarrow x = 300$

Jadi, HP = {300}

PENUGASAN

Pada unit 1. "Rancangan Jalan Raya dan Jembatan", meliputi beberapa kajian materi:

Tujuan:

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik dapat:

1. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian perbandingan dan persamaan trigonometri
2. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang melibatkan bentuk persamaan trigonometri.

Alat dan bahan yang digunakan:

1. Lingkungan sekitar (masyarakat)
2. Kertas grafik (buku kotak kecil)
3. Buku, internet, koran, majalah, dll
4. Penggaris, alat tulis

Langkah-langkah Kegiatan:

a. Kegiatan 1.1. Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri
Untuk mengetahui bagaimana menentukan persamaan trigonometri, pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

Masalah 1.1:

Menyelesaikan persamaan trigonometri

Diskusikan kegiatan ini bersama teman kalian.

Diketahui persamaan trigonometri $3 \cos^2 x = \sin^2 x$. Kita akan menentukan solusinya untuk $0o \leq x \leq 360°$

Alternatif Jawaban:

Untuk lebih mempermudah kalian mengerjakan, ikuti dan isilah titik-titik berikut.

Ingatlah rumus identitas $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, maka $\sin^2 x = 1 - ....$

Sehingga $3 \cos^2 x = 1 - .... \leftrightarrow .... \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{........} \leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{........}$

a. $\cos x = \frac{1}{........} \leftrightarrow \cos x = ...$

$x = ... + k.360$ atau $x = - .... + k.360$

$k = 0 \leftrightarrow x = ...$ atau $x = ...$ (Tidak memenuhi)

$k = 1 \leftrightarrow x = ...$ (Tidak memenuhi) atau $x = ...$

Diperoleh -x = ..., ...

b. $\cos x = -\frac{1}{........} \leftrightarrow \cos x = \cos ....$

$x = ... + k.360$ atau $x = - .... + k.360$

$k = 0 \leftrightarrow x = ...$ atau $x = ...$

$k = 1 \leftrightarrow x = ...$ (Tidak memenuhi) atau $x = ...$

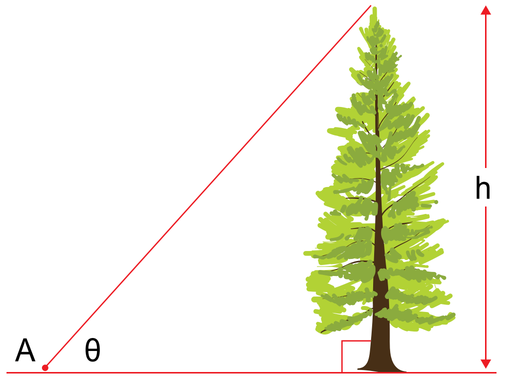
Jadi dari a dan b di atas diperoleh HP = {...., ..., ..., ...}

b. Kegiatan 1.2. Menyelesaikan permasalahan trigonometri sehari-hari
Untuk mengetahui bagaimana menyelesaikan permasalahan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari dengan prosedur dan strategi sesuai karakteritik masalah, pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

Masalah 1.2:

Mengukur tinggi pohon

Sekelompok warga belajar melakukan analisa yaitu mengukur ketinggian pohon dengan mengukur tinggi bayangannya yaitu 9 m (h) dan membentuk sudut 30°. Jadi, tinggi pohon adalah?



Alternatif Jawaban:

Langkah mengerjakan

Untuk lebih mempermudah kalian mengerjakan, ikuti dan isilah titi-titik berikut.

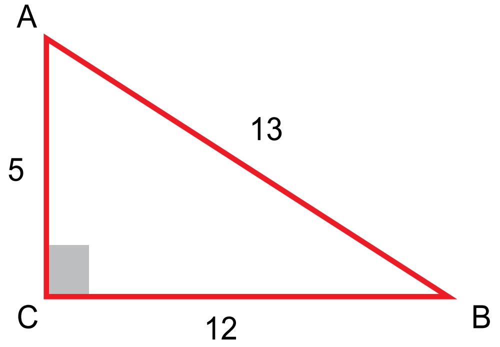
$$\sin 30^\circ = \frac{\text{tinggi bayangan pohon}}{\text{.............. pohon}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{9}{\text{.......}} \Leftrightarrow \text{tinggi pohon = ... m}$$

LATIHAN

Kerjakan soal berikut dengan benar!

1. Tentukan hasil dari soal-soal berikut :
   a. $\sin 120^\circ$
   b. $\sin (-\frac{\pi}{3})^\circ$
   c. $\cos 240^\circ$
   d. $\tan 315^\circ$
2. Perhatikan gambar berikut.



Tentukan:
a. Sin A, cos A, tan A, cotan A, sec A, cosec A
b. Sin B, cos B, tan B, cotan B, sec B, cosec B

3. Jika α lancip, carilah nilai perbandingan trigonometri <α, jika diketahui :
   a. $\sin \alpha = 0{,}5$
   b. $\cos \alpha = \frac{7}{25}$
   c. $\tan \alpha = \frac{4}{5}$
4. Dari suatu titik di permukaan tanah terlihat tinggi sebuah jembatan dengan sudut elevasi 45°. Jika jarak dari titik ke ujung jembatan 20 m. Tentukan tinggi jembatan tersebut!
5. Brian melihat sebuah mobil yang sedang parkir dari sebuah gedung bertingkat yang tingginya 200 m dengan sudut depresi 30°. Tentukan jarak mobil ke gedung bertingkat itu.
6. Cinta melihat sebuah menara dari jarak 2 km, dengan sudut elevasi 60°. Jika tinggi Cinta sampai ke mata 1,5 m tentukan tinggi menara tersebut!
7. Seorang guru memberikan tugas kepada muridnya untuk mengukur tinggi tiang bendera di sekolahnya dengan jarak murid ke tiang 5 m, dan sudut elevasi 23°. Tentukan tinggi tiang bendera tersebut jika tinggi murid sampai di mata 1,6 m!
8. Sita dengan tinggi 180 cm mengamati puncak gedung dengan sudut elevasi 45°. Kemudian ia berjalan sejauh 12 meter mendekati gedung. Di posisi yang baru, Sita mengamati puncak gedung dengan sudut elevasi 60°. Tentukan tinggi gedung tersebut! (Diketahui $\sqrt{3} = 1{,}7$).
9. Buktikan $\cos 60^\circ . \cos 30^\circ - \sin 60^\circ . \sin 30^\circ = 0$
10. $\tan 30^\circ + \tan 60^\circ = ...$

UNIT 2

RANCANGAN GEDUNG BERTINGKAT

Aplikasi ilmu matematika pada dasarnya sangatlah luas lingkupannya. Salah satu konsep serta teori dalam matematika yang erat hubungannya dengan kehidupan sehari-hari adalah trigonometri. Penerapan prinsip-prinsip dari trigonometri ternyata banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Seiring dengan perkembangan ilmu matematika atau rumus-rumus trigonometri yang biasanya dipakai dalam ilmu matematika diantaranya ialah:

- Rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut,
- Rumus trigonometri sudut rangkap,
- Rumus perkalian sinus dan kosinus atau rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus.

Dalam modul ini akan membahas tentang rumus jumlah dan selisih sudut. Dalam kehidupan sehari-hari kalian pasti sering melihat seseorang sedang mengukur rancangan gedung bertingkat yang akan dibangun. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri. Trigonometri digunakan secara sempurna pada ilmu arsitektur modern. Rancangan jembatan yang berbentuk kurva yang indah dan kuat pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu trigonometri ini.

Untuk itu, pelajari dan pahami uraian materi berikut dengan baik.

Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Fungsi dari rumus jumlah dan selisih dua sudut sinus, cosinus, dan tangen digunakan untuk menentukan nilai sudut yang tidak ada dalam sudut istimewa. Sebelumnya, kalian telah mempelajari tentang bagaimana cara menentukan nilai sudut istimewa. Ada dua cara yang digunakan untuk memudahkan kita mengingat nilai dari sudut istimewa. Cara pertama adalah menggunakan grafik fungsi sinus atau grafik fungsi cosinus. Cara kedua adalah mengggunakan rumus identitas trigonometri. Sekarang, mari kita simak rumus jumlah dan selisih dua sudut sinus dan cosinus berikut.

Untuk setiap a dan b ϵ R, berlaku:

1. Sin (a + b) = sin a. cos b + cos a. sin b

2. Sin (a - b) = sin a. cos b - cos a. sin b
3. cos (a + b) = cos a. cos b - sin a. sin b
4. cos (a - b) = cos a. cos b + sin a. sin b
5. tan (a + b) = $\dfrac{\text{tan a + tan b}}{\text{1 – tan a. tan b}}$
6. tan (a - b) = $\dfrac{\text{tan a - tan b}}{\text{1 + tan a. tan b}}$

Contoh Soal:

Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator tentukan nilai dari :

1. cos 75°
2. Jika sin x = $\frac{3}{5}$, cos y = $\frac{5}{13}$ maka tentukan cos (x – y)
3. sin 15°
4. sin 28°.cos 32° + cos 28° . sin 32°

Jawab:

1. cos 75° = cos (45° + 30°)
   = cos 45°.cos 30° – sin 45°.sin 30°
   = (½√2 . ½√3) – (½√2 . ½)
   = ¼√6 - ¼√2
   = ¼ (√6 - √2)

2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\left(\frac{3}{5}\right) + \cos x = 1$

$\cos x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\cos x = \sqrt{\frac{16}{25}}$ -

$\cos x = \frac{4}{5}$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$\sin y + \left(\frac{5}{13}\right) = 1$

$\sin y = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

$\sin y = \sqrt{\frac{144}{169}}$ -

$\sin y = \frac{12}{13}$

Jadi cos (x - y) = cos x.cos y + sin x.sin y

$= \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}\right)$

$= \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$

3. Sin 15° = sin (45° – 30°)
   = sin 45° . cos 30° – cos 45° . sin 30°
   = (½√2 . ½√3) – (½√2 . ½)
   = ¼√6 - ¼√2
   = ¼ (√6 - √2)
4. sin 28°.cos 32° + cos 28° . sin 32°

   Jawab:

   sin 28°.cos 32° + cos 28° . sin 32° = sin (28° + 32°)
   = sin 60° = ½√3

Rumus Penjumlahan dan Pengurangan Sinus, Cosinus dan Tangen

Dalam trigonometri, sinus, cosinus, tangen bisa digunakan bersama-sama baik dengan penjumlahan atau pengurangan maupun perkalian. Rumus-rumus penjumlahan, pengurangan, atau perkalian dalam trigonometri dapat diturunkan dari rumus jumlah dua sudut atau selisih dua sudut.

Untuk setiap a dan b ϵ R, berlaku:

sin a + sin b = 2 sin ½ (a + b) . cos ½ (a - b)

sin a - sin b = 2 cos ½ (a + b) . sin ½ (a - b)

cos a + cos b = 2 cos ½ (a + b) . cos ½ (a - b)

cos a - cos b = -2 sin ½ (a + b) . sin ½ (a - b)

Contoh:

Nyatakan tiap bentuk di bawah ini menjadi bentuk perkalian kemudian sederhanakan !

1. sin 2x + sin x
2. sin 6x – sin 2x
3. cos 7x – cos x
4. cos 5x + cos 3x

Jawab:

1. sin 2x + sin x = 2 sin ½ (2x + x) cos ½ (2x – x)
   = 2 sin 3/2 x cos ½ x
2. sin 6x – sin 2x = 2 cos ½ (6x + 2x) sin ½ (6x – 2x)
   = 2 cos 4x sin 2x
3. cos 7x – cos x = - 2 sin ½ (7x + x) sin ½ (7x – x)
   = - 2 sin 4x sin 3x
4. cos 5x + cos 3x = 2 cos ½ (5x + 3x) cos ½ (5x – 3x)
   = 2 cos 4x cos x

PENUGASAN

Pada unit 2. “Rancangan Gedung Bertingkat”, meliputi beberapa kajian materi:

Tujuan:

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik dapat:

1. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian dari jumlah dan selisih sudut
2. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian dari penjumlahan dan pengurangan sinus, cosinus dan tangen
3. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang melibatkan bentuk jumlah dan selisih sudut, penjumlahan dan pengurangan sinus, cosinus dan tangen.

Alat dan bahan yang digunakan:

1. Lingkungan sekitar (masyarakat)
2. Penggaris, alat tulis

Langkah-langkah Kegiatan:

a. Kegiatan 1.1. Menentukan penyelesaian dari jumlah dan selisih dua sudut
Untuk mengetahui bagaimana menentukan penyelesaian dari jumlah dan selisih dua sudut, pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

Masalah 1.1:

Menyelesaikan jumlah dan selisih dua sudut

Diskusikan kegiatan ini bersama teman kalian.

Sederhanakan:

1. $\cos 35^\circ - \cos 25^\circ$
2. $\sin 315^\circ - \sin 15^\circ$

Alternatif Jawaban:

Langkah mengerjakan

Untuk dapat mengerjakan soal-soal berikut, ikuti langkahnya dan isilah titik-titik yang ada.

1. $\cos 35^\circ - \cos 25^\circ$ $= -2 \sin \frac{1}{2} (.... + 25)^\circ \sin (35 - ....)$
$= -2 \sin ....^\circ \sin ....^\circ$
$= 2 \sin . \frac{1}{2} \sin ....^\circ$
2. $\sin 315^\circ - \sin 15^\circ$ $= 2 . \cos \frac{1}{2} (315 + ...)^\circ . \sin \frac{1}{2} (315 - ....)^\circ$
$= 2 . \cos 165^\circ . \sin ....^\circ$
$= 2 . \cos 165^\circ . \frac{1}{2}$
$= \cos ....^\circ$

LATIHAN

Kerjakan soal berikut dengan benar!

1. Jika $\tan \alpha = 1$ dan $\tan \beta = 1/3$ dengan α dan β sudut lancip, maka $\sin (\alpha - \beta) =$ ....
   a. $2/3 \sqrt{5}$
   b. $1/5 \sqrt{5}$
   c. 1/2
   d. 2/5
   e. 1/5 (UN Matematika Tahun 2008)

2. Nilai dari $\dfrac{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}{\sin 50^\circ + \sin 40^\circ}$
   a. 1
   b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c. 0
   d. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   e. −1 (UN Matematika Tahun 2008)

3. Dalam suatu segitiga ABC diketahui $\cos \angle A = 3/5$ dan $\cos \angle B = 5/13$.
   Nilai $\sin \angle C =$ ....
   a. 56/65
   b. 33/65
   c. − 16/65
   d. − 33/65
   e. − 56/65 (UN Matematika Tahun 2009)

4. Diketahui $\sin \alpha = 1/5 \sqrt{13}$, α sudut lancip. Nilai $\cos 2\alpha =$ ....
   a. −1
   b. −1/2
   c. −1/5
   d. −1/25
   e. 1 (UN Matematika Tahun 2009)

5. Diketahui $\tan \alpha - \tan \beta = 1/3$ dan $\cos \alpha \cos \beta = 48/65$, (α β lancip).
   Nilai $\sin (\alpha - \beta) =$ ....
   a. 63/65
   b. 33/65
   c. 26/65
   d. 16/48
   e. 16/65 (UN Matematika Tahun 2010)

6. Diketahui $(A + B) = \pi/2$ dan $\sin A \sin B = 1/4$. Nilai dari $\cos (A - B) =$ ....
   a. −1
   b. −1/2
   c. 1/2
   d. 3/4
   e. 1 (UN Matematika Tahun 2011)

7. Nilai $\dfrac{\cos 140^\circ - \cos 100^\circ}{\sin 140^\circ - \sin 100^\circ}$

a. $-\sqrt{3}$
b. $-1/2\sqrt{3}$
c. $1/2\sqrt{3}$
d. $1/3\sqrt{3}$
e. $\sqrt{3}$ (UN Matematika Tahun 2011)

8. Diketahui sin α = 3 / 5 dan cos β = 12 / 13 (α dan β sudut lancip).
Nilai sin (α + β) = ...
a. 56/65
b. 48/65
c. 36/65
d. 20/65
e. 16/65 (UN Matematika Tahun 2012)

9. Nilai sin 75° − sin 165° adalah ....
a. $1/4\sqrt{2}$
b. $1/4\sqrt{3}$
c. $1/4\sqrt{6}$
d. $1/2\sqrt{2}$
e. $1/2\sqrt{6}$ (UN Matematika Tahun 2012)

10. Diketahui nilai sin α cos β = 1/5 dan sin (α − β) = 3/5 untuk 0° ≤ α ≤ 180° dan 0° ≤ β ≤ 90°.
Nilai sin (α + β) = ...
a. −3/5
b. −2/5
c. −1/5
d. 1/5
e. 3/5 (UN Matematika IPA 2012 C89)

Rangkuman

1. Trigonometri adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen.
2. Ada tiga jenis identitas trigonometri yaitu:
   a. Hubungan kebalikan

$$\sin \alpha^\circ = \frac{1}{\cos ec\ \alpha^\circ}$$

$$\cos \alpha o = \frac{1}{\sec \alpha^\circ}$$

$$\cos ec\ \alpha^\circ = \frac{1}{\sin \alpha^\circ}$$

   b. Hubungan perbandingan

$\sin^2 \alpha^\circ + \sin^2 \beta^\circ = 1$

$1 + \tan^2 \alpha^\circ = \sec^2 \alpha^\circ$

$1 + \cot^2 \alpha^\circ = \cos ec^2\ \alpha^\circ$

UJI KOMPETENSI

Pilihlah satu jawaban yang benar dengan memberi tanda silang (x) pada huruf A, B, C, D, dan E

1. Sin 165° = ...
   a. -1/4 (√6 + √2) b. -1/2 (√6 + √2) c. 1/4 (√6 + √2)
   d. 1/4 (√6 - √2) e. 1/2 (√6 + √2)
2. Cos 195° = ...
   a. 1/4 (√6- √2) b. 1/2 (√6- √2) c. 1/2 (√6+ √2)
   d. 3/4 (√6- √2) e. 5/4 (√6- √2)
3. Dua buah sudut A dan B masing-masing bernilai sin A = 3/5 dan sin B = 12/13. Nilai cos (A – B) = ...
   a. -16/65 b. 5/13 c. 4/13 d. 4/5 e. 4/3
4. Jika tan A = 1 dan tan B = 1/3 dengan A dan B sudut lancip, maka sin (A + B) = ...
   a. 1/2 √20 b. 1/5 √20 c. 1/3 √20 d. 1/7 √20 e. 1/5 √20
5. Diketahui A + B = 60o dan cos A . cos B = 1/4, maka cos (A – B) = … .
   a. - 2 b. - 1 c. 0 d. e. 2
6. Himpunan penyelesaian persamaan cos 2x + cos x = 0, 0° ≤ x ≤ 180° adalah ....
   a. {45°, 120°} b. {45°, 135°} c. {60°, 135°} d. {60°, 120°} e. {60°, 180°}
   (UN Matematika Tahun 2011)
7. Himpunan penyelesaian dari persamaan cos 2x - sin x = 1 untuk 0° ≤ x ≤ 180° adalah ....
   a. {120°,150°, 210°, 330°, 360°}
   b. {120°,150°, 210°, 330°, 360°}
   c. {0°,180°, 210°, 330°, 360°}
   d. {0°,150°, 210°, 330°, 360°}
   e. {0°,150°, 210°, 330°, 360°}
8. Himpunan penyelesaian persamaan cos2x – 3cosx + 2 = 0; 0 ≤ x < 2π adalah ....
   a. {0, π, 3π/2, 2π}
   b. {0, 2π}
   c. {0, 2π/3; π, 2π}
   d. {0, π, 2π}
9. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri
   sin (2x + 120) – sin (2x + 240) = -3/2 untuk 0° ≤ x ≤ 360°
   a. {75°,105°, 255°, 285°}
   b. {75°,115°, 255°, 285°}
   c. {75°,105°, 265°, 285°}
   d. {95°,105°, 255°, 285°}
   e. {75°,125°, 255°, 285°}
10. Himpunan penyelesaian dari 2 $\sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ dengan 0° ≤ x ≤360° adalah ....
    a. {30°, 90°, 150°}
    b. {30°, 120°, 240°}
    c. {30°, 120°, 300°}
    d. {30°, 150°, 270°}
    e. {60°, 120°, 270°} (UN Matematika Tahun 2014)

Kunci Jawaban

1. (C) 1/4 (√6 + √2)
2. (A) 1/4 (√6- √2)
3. (A) -16/65
4. (B) 1/5 √20
5. (C) 0
6. (B) {45°, 135°}
7. (C) {0°,180°, 210°, 330°, 360°}
8. (B) {0, 2π}
9. (A) {75°,105°, 255°, 285°}
10. (A) {30°, 90°, 150°}

KRITERIA PINDAH MODUL

Setelah seluruh materi dan setiap kompetensi dasar dipelajari dengan seksama maka cobalah untuk mengerjakan latihan soal yang disediakan, baik secara individu, kelompok maupun dengan bimbingan tutor. Semakin rajin peserta didik dalam mengerjakan soal penugasan, diharapkan semakin terampil dan cepat mengeneralisasikan setiap permasalahan baik yang disediakan dalam modul ataupun dalam kaitannya dengan permasalahan sehari-hari.

Pada tahap berikutnya, kerjakan soal-soal dalam latihan, untuk mengukur penguasaan materi yang diperoleh dengan menggunakan rumus di bawah ini.

$$\text{Skor penilaian} = \frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{\text{jumlah soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90-100% = Baik Sekali

80-89% = Baik

70-79% = Cukup

60-69% = Kurang

Jika peserta didik mampu mencapai skor penilaian 80% atau lebih (tingkat penguasaan "baik" atau "sangat baik) maka dapat melanjutkan ke Standar Kompetensi berikutnya, tetapi jika penilaian kurang dari 80% dianjurkan untuk mengulang kembali Standar Kompetensi tersebut, terutama pada bagian yang belum dikuasai. Tanyakan dengan teman atau dengan bimbingan tutor.

Saran Referensi

Untuk menambah wawasan dalam pemahaman terkait modul 2 yang meliputi materi vektor pada bidang dan vektor dalam ruang, maka diharapkan peserta didik mencari sumber atau referensi lain selain modul ini. Saran referensi tersebut antara lain:

1. Judul Buku: "Ensiklopedia Matematika Terapan", Karya Sue Thomshon dan Ian Fortster, dengan judul tema terjemahan:
   a. Matematika dalam Masyarakat
   b. Matematika dalam Olahraga
   c. Matematika dalam Lingkungan
   d. Matematika dalam Tempat Kerja
   e. Matematika dalam Makanan
   f. Matematika dalam Rancang Bangun
   g. Matematika dalam Televisi
   h. Matematika dalam Sains
   i. Matematika dalam Teknologi
   j. Matematika dalam Perjalanan
   k. Matematika dalam Rumah
   l. Matematika dalam Tubuh
2. Judul Buku: "Tingkatkan Kemampuan Otak Anda (Improve Your Brain Power)", Karya Jackie Guthrie dan Tim Preston
3. Judul Buku: "Referensi Matematika dalam Kehidupan Manusia", Karya Dr. Wahyudin dan Drs. Sudrajat, M.Pd.
4. Judul Buku: "Panduan Belajar Matematika SMA.", Karya Sumanto
5. Sumber media internet (melalui browsing: anistuing.blogspot.co.id, fedraadi. wordpress. com, dan lain-lain)

Daftar Pustaka

Haryati Sri. 2007. Matematika Pendekatan Tematik dan Induktif Tingkat V Derajat Mahir 1 untuk Paket C Setara Kelas X SMA/MA". Jakarta : PT. Perca.

Juniati E.. Haryati Sri. 2007. Matematika Pendekatan Tematik dan Induktif, Program Kesetaraan Paket C Kelas XI Program IPS dan Bahasa". Jakarta : PT. Perca.

Noormandiri, B.K., 2016. Matematika untuk SMA/MA kelas X Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam". Jakarta : Erlangga.

Sembiring S., Nagiah, Mulyaningsih S., 2014. Matematika untuk SMA/MA Kelas X Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam" Bandung : PT. Sewu.

Wirodikromo, S..2002. Matematika untuk SMA Kelas X. Jakarta : Erlangga.

Yuana R.A., Indriyastuti. 2016. Buku Siswa, Perspekstif Matematika 1 untuk kelas X SMA dan MA Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam". Solo : PT. Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

http://www.matematikastudycenter.com/bank-soal-un-matematika-sma/173-bank-soal-un-sma-persamaan-trigonometri.

https://matematikastudycenter.com/bank-soal-un-matematika-sma/176-bank-soal-un-sma-trigonometri-dua-sudut-jumlah-selisih-h